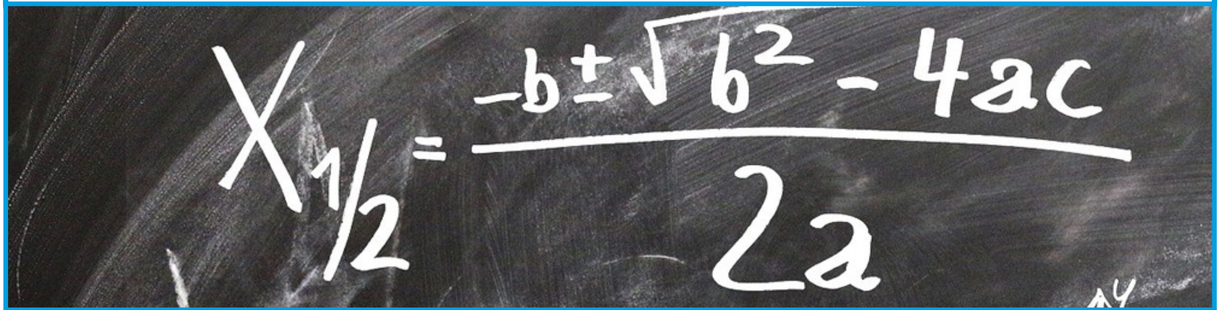
FORMELSAMMLUNG



ARITHMETIK

by Marcel Laube

Einführung

Die Teilgebiete der Mathematik:

Mathematik

- Arithmetik (Lehre von den Zahlen)
- Geometrie (Lehre von den Raumgrössen)
  - Planimetrie (Lehre von den ebenen Flächen)
  - Trigonometrie (Dreiecks-berechnungen)
  - Stereometrie (Lehre von den Körpern)
- Algebra und Funktionslehre (Lehre von den Gleichungen)

Die Operations-Stufen

- **Operation 1. Stufe:** Addition, Subtraktion
- **Operation 2. Stufe:** Multiplikation, Division
- **Operation 3. Stufe:** Potenzieren, Radizieren, Logarithmieren

---

Operatione 1. Stufe: Addition und Subtraktion

Bezeichnungen

Summanden

$$\boxed{\underbrace{a+b}_{\text{Summe}}=c}$$

Summenwert

Minuend Subtrahend

$$\boxed{c-b=a}$$

Wert der Differenz (Ergebnis)

$$\underbrace{c-b}_{\text{Differenz}}$$

Vorzeichenregel

$$\boxed{\begin{array}{l} a+(+b)=a+b \\ a-(-b)=a+b \\ \\ a+(-b)=a-b \\ a-(+b)=a-b \end{array}}$$

Rechenoperation 2. Stufe

Multiplikation:

Bezeichnungen

Summanden Faktoren

$$\boxed{a+a+a+a=4*a}$$

$$\underbrace{a+a+a+a}_{\text{Summe}} \quad \underbrace{4*a}_{\text{Produkt}}$$

Vorzeichenregel

$$\boxed{\begin{array}{l} (+a) * (+b) = ab \\ (-a) * (-b) = ab \\ \\ (+a) * (-b) = -ab \\ (-a) * (+b) = -ab \end{array}}$$

Binomische Formeln:

1. binomische Formel: $\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$

2. binomische Formel: $\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$

3. binomische Formel: $\boxed{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$

Division:

Bezeichnungen

Zähler od. Dividend

$$\boxed{\underbrace{a : b}_{\text{Quotient}} = \frac{a}{b} = c}$$

Quotient Divisor

Vorzeichenregel

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{(+a)}{(+b)} &= \frac{a}{b} \\ \frac{(-a)}{(-b)} &= \frac{a}{b} \\ \frac{(+a)}{(-b)} &= -\frac{a}{b} \\ \frac{(-a)}{(+b)} &= -\frac{a}{b} \end{aligned}}$$

- **Die Vorzeichen von Zähler und Nenner können** demzufolge **vertauscht werden**.

Division einer Summe durch eine Summe: Partialdivision

$$(6x^3 + 29x^2 + 38x + 35) : (2x + 7) = \underline{\underline{3x^2 + 4x + 5}}$$

$$\frac{6x^3}{2x} = \underline{\underline{3x^2}}; \quad 3x^2 * (2x+7) = \underline{6x^3 + 21x^2}$$

$$8x^2 + 38x + 35$$

$$\frac{8x^2}{2x} = \underline{\underline{4x}}; \quad 4x(2x+7) = \quad \underline{8x^2 + 28x}$$

$$10x + 35$$

$$\frac{10x}{2x} = \underline{\underline{5}}; \quad 5(2x+7) = \quad \underline{10x + 35}$$

$$0$$

Rechenoperation 3. Stufe

Potenzieren

Bezeichnungen

Basis Exponent

$$\boxed{\underbrace{a^n}_{\text{Potenz}} = b}\ \text{— Potenzwert}$$

Vorzeichenregel

Eine Potenz ist **POSITIV**, wenn:

- Die Basis positiv ist $a^n=b$; $3^4=81$
- Oder mit negativer Basis, wenn der Exponent eine grade Zahl ist $(-a)^{2n}=a^{2n}$; $(-3)^4=81$

Eine Potenz ist **NEGATIV**, wenn:

- Die Basis negativ ist und der Exponent eine ungerade Zahl ist $(-a)^{2n-1}= -a^{2n-1}$;$(-3)^5= -243$

Addieren und subtrahieren von Potenzen

- Es könne **nur Potenzen mit gleichen Exponenten UND gleichen Basen** addiert oder subtrahiert werden.
- Es werden nur die **Beizahlen** addiert/subtrahiert

$$5a^3-2a^2+7b^3-2a^3+b^3=3a^3-2a^2+8b^3$$

Multiplizieren von Potenzen

Potenzen können multipliziert werden, wenn:

- Die Basen gleich sind
- ODER, die Exponenten gleich sind

Gleiche Basen:

$$\boxed{a^m * a^n = a^{m+n}}$$

Gleiche Exponenten:

$$\boxed{a^n * b^n = (ab)^n}$$

Dividieren von Potenzen

Potenzen könne dividiert werden, wenn:

- Die Basen gleich sind
- ODER, die Exponenten gleich sind.

Gleiche Basen:

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$$

Gleiche Exponenten:

$$\boxed{\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n}$$

Sonderfälle bei der Division von Potenzen:

$$\boxed{a^{-b} = \frac{1}{a^b}}$$

$$\boxed{\frac{a^3}{a^3} = 1 \text{ weil } a^{3-3} = a^0 = 1}$$

Potenzieren von Potenzen:

Eine Potenz wird potenziert, indem man die Exponenten multipliziert und die Basis mit diesem Produkt potenziert.

$$\boxed{\left(a^m\right)^n = a^{m*n}}$$

deshalb könne auch die Exponenten vertauscht werden:

$$\boxed{\left(a^m\right)^n = a^{mn} = \left(a^n\right)^m}$$

Potenzieren von Binomen

1	$(a \pm b)^0$
1 1	$(a \pm b)^1$
1 2 1	$(a \pm b)^2$
1 3 3 1	$(a \pm b)^3$
1 4 6 4 1	$(a \pm b)^4$
1 5 10 10 5 1	$(a \pm b)^5$
etc.	etc.

Regel zum Ordnen der Potenzen:

$$\begin{array}{cccccc} a^5 & a^4 & a^3 & a^2 & a & \\ & b & b^2 & b^3 & b^4 & b^5 \end{array}$$

Vorzeichenregel:

$(a+b)^n$: + + + + + + ...
$(a-b)^n$: + - + - + - + ...

Beispiel:

$$\begin{array}{lcccc} (a+b)^3: & 1 & 3 & 3 & 1 \\ & a^3 & a^2 & a & \\ & & b & b^2 & b^3 \\ \hline & a^3 + & 3a^2b + & 3ab^2 + & b^3 \end{array}$$

Radizieren

Bezeichnungen

Wurzelexponent

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = x}$$

Radikant

Weil Radizieren eine Umkehrung des Potenzierens ist gilt:

$$\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a}$$

Wurzeln als Potenzen darstellen

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}}$$

Addieren und subtrahieren von Wurzeln

Es können nur Wurzeln mit gleichem Exponent UND Radikant addiert/subtrahiert werden.

- Es werden nur die Beizahlen subtrahiert/addiert

Beispiel:
$3\sqrt[3]{8} + 2\sqrt[3]{8} - 3\sqrt[3]{8} + 2\sqrt[3]{2} = (3+2-3)\sqrt[3]{8} + 2\sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{8} + 2\sqrt[3]{2} = 4 + 2\sqrt[3]{2}$

Radizieren von Produkten

$$\boxed{\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} * \sqrt[n]{b}}$$

$$\boxed{a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}}$$

Radizieren von Brüchen

$$\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}$$

Entfernen der Wurzel aus dem Nenner

$$\boxed{\frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3*\sqrt{7}}{\sqrt{7*\sqrt{7}}} = \frac{3*\sqrt{7}}{7} = \frac{3}{7}\sqrt{7}} \qquad \boxed{\frac{x}{\sqrt{x}} = \frac{x*\sqrt{x}}{\sqrt{x}*\sqrt{x}} = \sqrt{x}}$$

Radizieren von Potenzen

$$\boxed{\sqrt[n]{a^x} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^x}$$

oder mit Hilfe des Potenzierens:

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}}$$

Man kann also den Wurzel- und Basisexponent mit der gleichen Zahl multiplizieren oder dividieren:

$$\boxed{\sqrt[nx]{a^{mx}} = \sqrt[n]{a^m}}$$

Multiplizieren und dividieren von ungleichnamigen Wurzeln

$$\boxed{\sqrt[3]{5^2} * \sqrt{5} = \sqrt[3*2]{5^{2*2}} * \sqrt[3*2]{5^3} = \sqrt[6]{5^4 * 5^3} = \sqrt[6]{5^7} = 5^{\frac{7}{6}} = 5^{\frac{6}{6}+\frac{1}{6}} = 5\sqrt[6]{5}}$$

$$\boxed{\frac{\sqrt[3]{12}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt[3*2]{12^2}}{\sqrt[3*2]{2^3}} = \sqrt[6]{\frac{12^2}{2^3}} = \sqrt[6]{\frac{144}{8}} = \sqrt[6]{18}}$$

Radizieren von Wurzeln (Doppelwurzeln)

$$\boxed{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}}$$

Logarithmieren

Bezeichnungen / Definition

Logarithmus

Numerus

$$\boxed{x = \log_a b}$$

Basis

- Der Logarithmus von *b* zur Basis *a* ist *x*.

Um bei der Gleichung $a^x = b$ die Variable x zu bestimmen, benötigt man die oben erwähnte „Logarithmus-Gleichung".

- Ist ***b<0***, so gibt es keine reelle Zahl für *x*.
- *$x=\log_a 0$* **gibt es nicht**! Weil $a^x=0$ keine Lösung hat.

Spezielle Logarithmen:

Zehnerlogarithmen:	Basis 10	$\log_{10}b$	->	lg b
Binäre Logarithmen:	Basis 2	$\log_2 b$	->	lb b
Natürliche Logarithmen:	Basis e	$\log_e b$	->	ln b

Logarithmengesetze

Produkt:

$$\boxed{\log_a(u*v) = \log_a u + \log_a v}$$

Bruch:

$$\boxed{\log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v}$$

Potenz:

$$\boxed{\log_a b^n = n*\log_a b}$$

deshalb auch:

$$\boxed{\log_a \sqrt[v]{b^u} = \frac{u}{v}*\log_a b}$$

Beispiel:
Der Logarithmus des Produktes 4,56*1,84*0,0365=

$$\lg(4{,}56*1{,}84*0{,}0365)$$
$$=\lg 4{,}56*\lg 1{,}84*\lg 0{,}0365$$
$$=0{,}659+0{,}2648''(-1{,}437)$$
$$=-0{,}5132$$

Numerus zu –0,5132 ist <u>0.306</u>

Übergang von einem Logarithmensystem zu einem anderen

Vom allgemeinen zum Zehnerlogarithmus:

$$\boxed{\log_b a = \frac{\lg a}{\lg b}}$$

Vom natürlichen zum Zehnerlogarithmus:

$$\boxed{\ln x = \frac{\lg x}{\lg e}}$$

Imaginäre Zahlen

$$\boxed{\begin{array}{c} i = \sqrt{-1} \\ i^2 = -1 \\ -i^2 = -1 \end{array}}$$

Die zwei Lösungen für die Gleichung $x^2=-4$ sind also:

$$x = \pm\sqrt{4 * i^2}$$

$$x_1 = 2i \ ; \ x_2 = -2i$$

Es gilt auch:

$$\sqrt{-4} * \sqrt{-9} = i\sqrt{4} * i\sqrt{9} = i^2\sqrt{4*9} = -6$$

$$\sqrt{-a} * \sqrt{-b} = i\sqrt{a} * i\sqrt{b} = i^2\sqrt{ab} = -\sqrt{ab}$$

Folgen und Reihen

Eine ***Folge*** ist eine nach einem bestimmten Gesetz aufeinanderfolgende Anzahl von Zahlen.

z. Bsp: 4 8 12 16 20 24 . . . .

Wenn die einzelnen Glieder einer Folge addiert werden, so erhält man eine ***arithmetische Reihe***.

z. Bsp: 4 + 8 + 12 + 16 + 20 + 24 . . . .

Allgemein gelten folgende Bezeichnungen:

- Das erste Glied (Anfangsglied): a_1
- Das zweite Glied: a_2
- Das allgemeine Glied (k-te Glied): a_k
- Das letzte Glied: a_n
- Die konstante Differenz: d

Demzufolge:

- Das vierte Glied: $a_4=a_1+3d$
- Das k-te Glied: $a_k=a_1+(k-1)*d$
- Das letzte Glied: $a_n=a_1+(n-1)*d$

Jedes Glied einer arithmetischen Folge ist gleich dem arithmetischen Mittel seiner zwei benachbarten Glieder.

Summe der Arithmetischen Reihe:

$$\boxed{S=\frac{n}{2}(a_1+a_n)}$$

oder

$$\boxed{S=\frac{n}{2}\left[2a_1+(n-1)d\right]}$$

Arithmetische Interpolation

Um zwischen zwei Zahlen *a* und *b*, *m* weitere Zahlen einzuschieben, sodass eine arithmetische Folge entsteht, so gilt folgende Formel zur Berechnung der Differenz:

$$\boxed{d_i = \frac{b-a}{m+1}}$$

a	=	Anfangsglied
b	=	Endglied
m	=	Anzahl der eingeschobenen Glieder
d_i	=	Differenz der entstandenen arithmetischen Folge

Geometrische Folgen und Reihen

Seite 86-91

Zinseszinsrechnungen

Seite 92