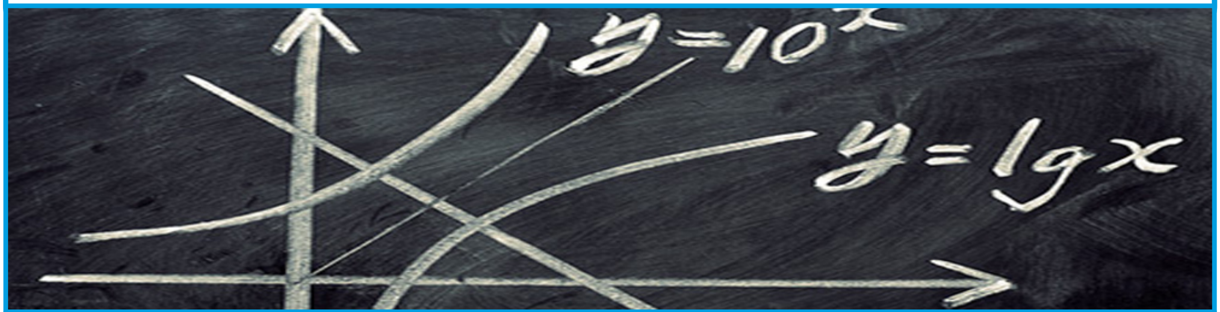
FORMELSAMMLUNG



FUNKTIONSLEHRE

by Marcel Laube

Einführung

In Wissenschaft und Technik, aber auch in der Praxis des täglichen Lebens, sind nicht selten „Mengen“ von Zahlen, Grössen oder anderen Objekten in bestimmter Weise miteinander verknüpft, so dass jedem **Element** aus einer der Mengen mindestens ein Element aus der anderen Menge **zugeordnet** ist.

Werden Elemente einer Menge Elemente einer anderen Menge zugeordnet, so spricht man auch von einer **Relation** („Beziehung“, dieser Begriff wird in der Mathematik und in der Logik enger gefasst als in der Umgangssprache).
Wir können verschiedene Relationen unterscheiden:

Relation 1

Von einem **Element der Menge A** gehen **ein oder mehrere Pfeile** aus und es führen **ein oder mehrere Pfeile** zu den **Elementen der Menge B**.

- Die Relation nennt man: NICHT EINDEUTIG

Relation 2

Von **jedem Element der Menge A** geht **genau ein Pfeil** zu einem der Menge B. Zu den **Elementen der Menge B** können aber **gleichzeitig mehrere Pfeile** hinführen.

- Die Relation nennt man: EINDEUTIG

Relation 3

Von **jedem Element der Menge A** geht **genau ein Pfeil** zu einem Element der Menge B und zu **jedem Element der Menge** B führt **genau ein Pfeil** hin.

- Die Relation nennt man: UMKEHRBAR EINDEUTIG

- EINDEUTIGE oder UMKEHRBAR EINDEUTIGE RELATIONEN nennt man auch FUNKTIONEN. (Somit ist jede Funktion eine Relation aber nicht jede Relation eine Funktion.)

Darstellungsformen von Funktionen

Funktionale Beziehungen können auf folgende Arten dargestellt werden:

- Darstellung durch Gleichungen
- Darstellung in Tabellen
- Darstellung in Diagrammen

Begriffe

Unabhängige Variable:	Die Grösse, die beliebig gewählt werden kann.
Konstante:	Eine fixe Zahl (Wert) in der Formel (z.Bsp: π)
Abhängige Variable:	Der Wert, der der unabhängigen Variable zugeordnet wird. (Sie wird immer in der Senkrechten eingezeichnet)

Beispiel:

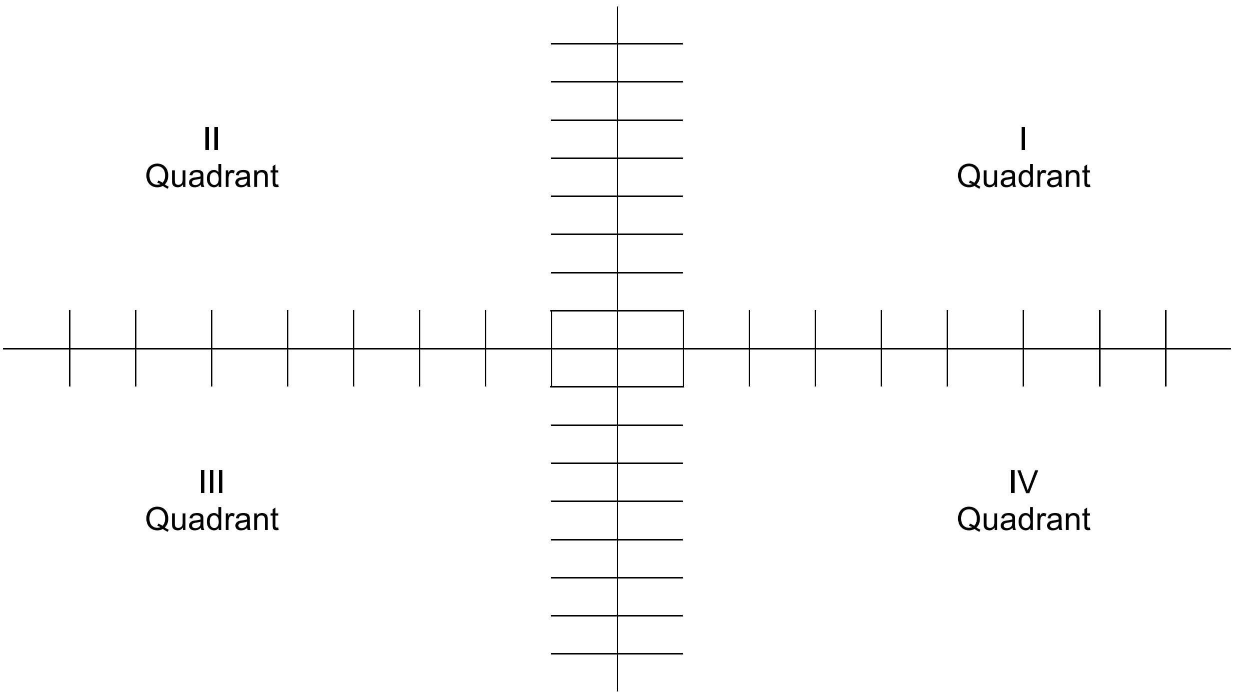
$$A = \frac{d^2 * \pi}{4}$$

Unabhängige Variable:	d
Konstanten:	¼; π
Abhängige Variable:	A

Koordinatensysteme

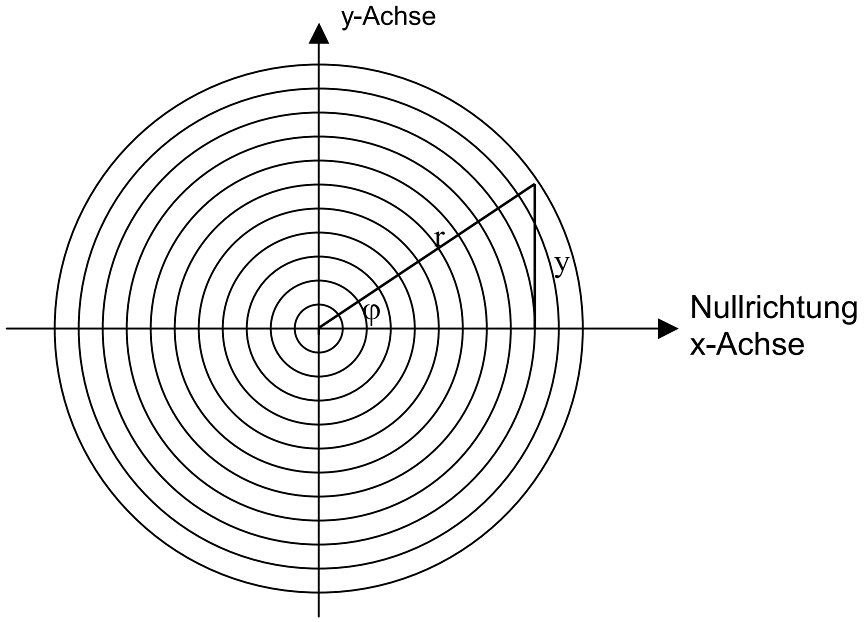
Rechtwinklig kartesisches Koordinatensystem

- Koordinatenachsen stehen senkrecht aufeinander
- Schnittpunkt der Koordinatenachsen heisst: Nullpunkt, Koordinatenursprung oder Ursprung
- Waagrechte Achse: **Abszisse** (x-Richtung)
- Senkrechte Achse: **Ordinate** (y-Richtung)
- Bei der Angabe der Koordinate immer zuerst die x-Koordinate angeben



Polarkoordinatensystem

- Dort praktisch, wo es sich um gesuchte Winkel(bereiche) handelt
- In der Mathematik zur Darstellung von komplexen Zahlen
- Ein Punkt wird mit dem Abstand *r* vom Nullpunk und dem Winkel φ gegenüber der Nullrichtung angegeben
- Positive Zählrichtung ist der Gegenuhrzeigersinn



Empirische und analytische Funktionen

Empirische Funktion:	Funktionen, bei denen der Verlauf der Kurve nicht vorauszusagen ist. Der Zusammenhang der Variablen kann nur durch Messung oder Beobachtung ermittelt werden. (z.B: Fieberkurve; Regenwassermenge)
Analytische Funktion:	Hier lässt sich der Zusammenhang zwischen der abhängigen und der unabhängigen Variable durch eine Rechnungsvorschrift (**Funktionsgleichung**) herstellen. (z.B: Kreisfläche) In der Mathematik massgebend.

Darstellung der Funktionsgleichung:

y=f(x)	« y ist eine Funktion von x »

Definitionsbereich und Wertemenge einer Funktion

- Der **Definitionsbereich** einer Funktion ist diejenige **Spannweite** in welcher sich die **Werte** befinden, **welche für diese Funktion Sinn machen**.

Wenn zum Beispiel in einer Funktion der Definitionsbereich von –273°C bis zu 1400°C reicht, so wird dieser wie folgt geschrieben:

-273°C < t < 1400°C « -273°C kleiner als t kleiner als 1400°C »

Allgemein:

- Die Gesamtheit der Werte, die die unabhängige Variable einer Funktion annehmen kann, heisst Definitionsbereich der Funktion.

- Die Wertemenge sind alle Werte, die die abhängige Variable y durch die Zuordnung bekommen kann.

Analytische Funktionen

Schreibweisen

Explizite Form der Funktionsgleichung:	Die Abhängige Variable ist auf einer Seite der Gleichung isoliert.
Implizite Form der Funktionsgleichung:	Die Gleichung ist nicht nach der unabhängigen Variable aufgelösst.

Lineare Funktion (Funktion 1. Grades)

Allgemeine Funktionsgleichung:

- $y = mx + b$

Dabei sind *m* und *x* beliebige Zahlen (Konstanten).

- Da die unabhängige Variable x in keiner höheren als in der ersten Potenz vorkommt, nennt man die lineare Funktion auch Funktion 1. Gardes.
- Die Kurve einer linearen Funktion ergibt immer eine Gerade (linear = gradlinig)

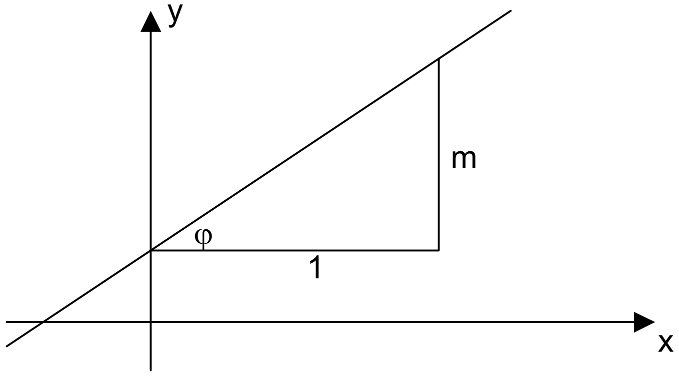
Geometrische Bedeutung der Konstanten *m* und *b*

Die Konstante m

In die positive Richtung der x-Achse gesehen:

- Ist die Konstante *m* positiv: Die Gerade steigt 
- Ist die Konstante *m* negativ: Die Gerade fällt 

- *y* ändert sich um den Betrag *m*, wenn man *x* um 1 vergrössert



Demzufolge kann man sagen:

$\boxed{\tan\varphi = \frac{m}{1} = m}$ Die Konstante *m* gibt also die Steigung der Gerade an.

Die Konstante b

- Die Konstante ***b*** gibt an, bei welchem Punkt die Gerade die y-Achse schneidet.
- Also: **Die Gerade schneidet die y-Achse bei den Koordinaten (0/<u>b</u>)**

Ermittlung der Funktionsgleichung einer Geraden

Wenn die Funktion graphisch dargestellt ist, kann die Funktionsgleichung (mit den oben beschriebenen Erkenntnissen) abgelesen werden.

Liegen von der Funktion nur zwei Punkte $P_1(x_1/y_1)$ und $P_2(x_2/y_2)$ vor, kann die Funktionsgleichung wie folgt ermittelt werden:

$$\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

Da bekanntlich die Konstante *b* angibt, in welchem die Gerade die y-Achse schneidet, kann dieser Punkt mit als **P_3(0/b)** bezeichnet werden.

Und deshalb:

$$\boxed{b = y_3 = y_2 - mx_2}$$

Die Nullstelle einer linearen Funktion

Bergriffe:

Funktionsgleichung:	Eine Funktionsgleichung ergibt graphisch stets **eine Kurve**. Sie gibt die Beziehung zwischen *x* und *y* an.
Bestimmungsgleichung:	Bei der Bestimmungsgleichung geht es darum, den Wert der Unbekannten *x* anzugeben. Die meisten Bestimmungsgleichungen lassen sich mit einfachen algebraischen Operationen lösen. Die Lösung ergibt **einen festen Zahlenwert**.
Nullstelle:	Die Stelle *x*, an der eine Funktion die x-Achse schneidet. Da der y-Wert bei der Nullstelle also immer 0 ist sind die Koordinaten der Nullstelle allgemein immer (x_0/0)

Deshalb kann aus der Funktionsgleichung die Nullstelle sehr einfach ermittelt werden.

Beispiel:

Funktionsgleichung: $y = 2x - 5$

Für die Nullstelle gilt also: $0 = 2x_0 - 5$

$5 = 2x_0$

$\underline{\underline{x_0 = 2,5}}$

Zur graphischen Ermittlung der Nullstelle wird die Gerade eingezeichnet und der Wert, an welchem die Gerade die x-Achse schneidet abgelesen.

Das numerische Lösen von Bestimmungsgleichungen 1. Grades

Begriffe

- Allgemeine Form ist: *ax + b = 0*
- *ax* heisst das lineare Glied
- *b* heisst das absolute Glied
- Wenn eine Bestimmungsgleichung nach *x* aufgelöst wird, ist der erhaltene Wert die Lösung (= Nullstelle der Gerade)

Beispiel:

$8(3x-2)-7x-5(12-3x) = 13x$

wird (in die allgemeine Form ungewandelt):

$19x-76 = 0$

⇨ $\underline{\underline{x = 4}}$

Schritte zur Lösung von Gleichungen 1.Grades:

- Falls Brüche vorhanden sind: kgV bestimmen und erweitern
- Multiplizieren der Brüche mit kgV; die Brüche fallen weg
- Klammern lösen; ordnen; zusammenfassen
- eventuell Probe

<u>Schnittpunkte zweier linearer Funktionen</u>

Welcher der folgenden drei Punkte liegt auf der Kurve $y = 3x + 2$?

P_1 (-73/-218) P_2 (-568/1702) P_3 (13,55/43,65)

- Der Punkt kann nur auf der Kurve liegen, wenn seine Koordinaten die Funktionsgleichung erfüllen.

P_1: -218 =? 3(-73)+2	P_2: -1702 =? 3(-568)+2	P_3: 43,65 =? 3*13,55+2
<u>NEIN</u>	<u>JA</u>	<u>NEIN</u>

- Um den Schnittpunkt zweier linearer Funktionen zu rechnen, muss man die beiden Gleichungen je nach *x* oder *y* auflösen und sich gleichsetzen. Anschliessend kann die entstandene Gleichung nach *x* bzw. *y* aufgelöst werden. Um die zweite Variable zu erhalten, wird die erste Variable in einer der Gleichungen eingesetzt. Die zwei erhaltenen Werte sind die Koordinaten des Schnittpunktes.

Beispiel:

F_1: $2x – 3y = 0$ F_2: $x + 2y = 14$

- Nach *y* aufgelöst:

F_1: $y = 2/3x$ F_2: $y = -1/2x + 7$

- Gleichgesetzt und nach *x* aufgelöst :

$2/3x = -1/2x + 7$

$\underline{\underline{x = 6}}$

- *x* in der Gleichung $2x – 3y = 0$ eingesetzt und nach *y* aufgelöst:

$2*6 – 3y = 0$

$\underline{\underline{y = 4}}$

Die Koordinaten des Schnittpunktes lauten <u>S(6/4)</u>

Das selbe Beispiel kann auch graphisch gelöst werden, indem die zwei Funktionen aufgezeichnet werden, und der Schnittpunkt abgelesen wird.

Lösung von linearen Gleichungen mit zwei unbekannten

Einsetzmethode

- Man **isoliert aus einer Gleichung eine Unbekannte** und setzt **diesen Ausdruck in der anderen Gleichung ein**. So erhält man eine gewöhnliche Gleichung mit einer Unbekannten. Die zuerst isolieret Unbekannte erhält man durch rückläufiges Einsetzen.

  $2x + 5y = 29$
  $3x + 2y = 16$

  -> $x = (29-5y):2$ (in der zweiten Gleichung einsetzen)

  -> $3*((29-5y):2)+2y = 16$

  $\underline{\underline{y = 5}}$

  $2x + 5*5=29$

  -> $\underline{\underline{x = 2}}$

Gleichsetzungsmethode

- Bei dieser Methode werden **beide Gleichungen** nach derselben Unbekannten umgeformt und dann **gleichgesetzt**. Die entstehende Gleichung (mit einer Unbekannten) wird ganz herkömmlich gelöst. Um die **zweite Unbekannte** zu erhalten wird die erste Unbekannte in eine der beiden Gleichungen **eingesetzt**.

  $3x + 2y = 4 - 3y$ -> $3x = 4 - 5y$
  $3x - 14 = -7y$ -> $3x = -7y + 14$

  -> $4 - 5y = -7y + 14$

  -> $\underline{\underline{y = 5}}$

  $3x - 14 = -7*5$

  -> $\underline{\underline{x = -7}}$

Additions- oder Subtraktionsmethode

- Man **multipliziert** bei dieser Methode **eine oder beide Gleichungen so mit Zahlen**, **dass bei anschliessender Addition oder Subtraktion der Gleichungen eine Unbekannte wegfällt**. Man erhält wiederum eine Gleichung mit einer Unbekannten. Durch rückläufiges Einsetzen erhält man auch hier die zweite Unbekannte.

  $-x + 5y = 11$
  $3x + 4y = 24$

  $-3x + 15y = 33$ *(mit 3 multipliziert)*
  $\underline{3x + 4y = 24}$
  $19y = 57$

  $\underline{\underline{y = 3}}$

  $\underline{\underline{x = 4}}$ *(durch Einsetzen)*

Spezialfälle von linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten

- Ergibt eine Lösung **0=0** so gibt es **unendlich viele Lösungspaare** (Die Kurven liegen aufeinander)
- Ergibt eine Lösung 0=[irgend eine Zahl] so ist dies ein Widerspruch. Es gibt **keine Lösungspaare**. (Die Kurven sind genau parallel)

Gleichungssystem mit drei linearen Gleichungen/Unbekannten

- Es muss zuerst versucht werden, ein Gleichungssystem mit zwei Unbekannten zu erhalten.
- Dies geschieht, indem man eine Gleichung nach einer Gleichung auflöst, und diesen Ausdruck in den zwei anderen Gleichungen einsetzt.

Propotionalität und Proportionen

Direkte Proportion

- Allgemeine Funktion $y = mx$
- m ist der Proportionalitätsfaktor
- Der Graph geht durch den Ursprungspunkt des Koordinatensystemes
- **Die beiden Variablen sind direkt voneinander abhängig (Wenn eine Variable zunimmt, so nimmt die Andere um den gleichen Faktor zu)**

Indirekte Proportion

- Allgemeine Funktion $y = \frac{c}{x}$
- Der Graph ergibt eine Hyperbel
- **Wenn eine Variable zunimmt, so nimmt die Andere um den gleichen Faktor ab**

Proportion: Begriffe

Aussenglieder

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}}$$

Innenglieder

Gesetze der Proportionen

- Das Produkt der Aussenglieder ist gleich dem Produkt der Innenglieder (Produktgleichung der Proportion)

- Je zwei Innenglieder oder zwei Aussenglieder dürfen untereinander vertauscht werden, ohne dass die Proportion falsch wird.

  $$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad -> \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \quad -> \quad \frac{d}{b} = \frac{c}{a}}$$

- Proportionen können auch rückwärts gelesen werden. (Kippregel)

  $$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad -> \quad \frac{d}{c} = \frac{b}{a}}$$

Fortlaufende Proportionen

Sind in einer Proportion **drei oder mehr Verhältnisse gleichgesetzt**, so spricht man von einer fortlaufenden Proportion.

Die Proportion $\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{9}{15} = \frac{12}{20}$

Wird dann so geschrieben: $3:6:9:12 = 5:10:15:20$

- Dies ist jedoch NICHT eine UMWANDLUNGSFÄHIGE GLEICHUNG!!!

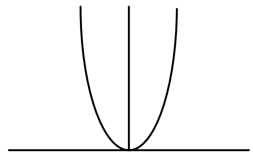
Quadratische Funktion

Begriffe und Funktionstypen

Allgemeine Form $y = ax^2 + bx + c$ *(wobei $a \neq 0$)*

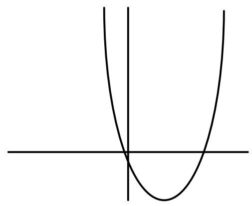
Sonderfälle:

Sonderfall 1



- Die Funktion: $y = x^2$ *(weil: $a=1$; $b=0$; $c=0$)*
- Wir die **quadratische Normparabel** genannt
- Sie liegt axialsymetrisch zur y-Achse und ihr tiefster Punkt, der Scheitel, liegt im Nullpunkt des Koordinatensystems

Sonderfall 2

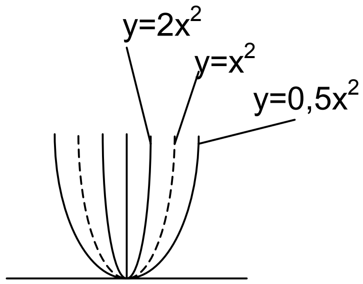


- Die Funktion: $y = x^2 + bx + c$
- Der Koeffizient des quadratischen Gliedes *a* ist 1
- Diese Kurve hat die gleiche Form wie die Normparabel
- Sie ist jedoch zum Achsenkreuz parallel verschoben

Sonderfall 3

- Die Funktion: $y = ax^2$
- Diese Funktion ergibt eine **gehobene** bzw. **gesenkte** Normparabel

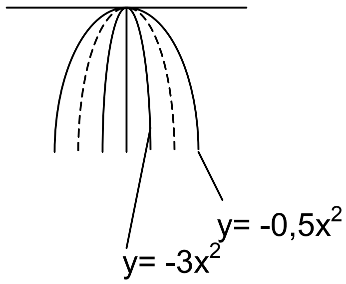
-> **Bei a = positiv:**



$y = 2x^2$: die Parabel ist im Verhältnis 2:1 **gehoben**

$y = 0.5x^2$: die Parabel ist im Verhältnis 2:1 **gesenkt**

-> Bei a = negativ



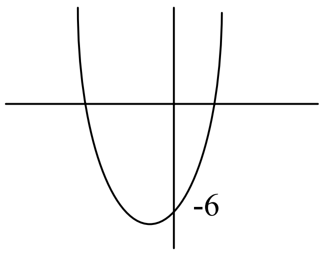
- Ist ***a* negativ**, so liegt die Kurve um die x-Achse **heruntergeklappt nach unten**.

Mit diesen Erkenntnissen kann nun bei einer allgemeinen quadratischen Funktion $y = ax^2 + bx + c$ schon im Voraus gesagt werden, wie die Parabel liegt (nach oben oder nach unten), ob sie gehoben oder gesenkt ist und, ob sie vom Achsenkreuz verschoben ist.

Nullstelle der quadratische Funktion

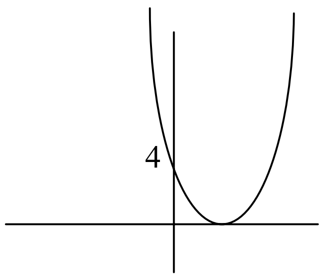
- Bei den quadratischen Funktionen gibt es **drei Möglichkeiten**, wie die Nullstellen „verteilt“ sind.

$y = x^2 + x – 6$



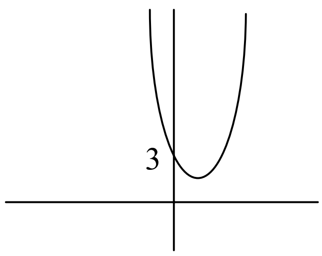
- die Kurve schneidet die x-Achse in zwei Punkten
- Die Funktion hat **zwei Nullstellen**

$y = x^2 – 4x + 4$



- Die Kurve berührt die x-Achse in einem Punkt
- Die Funktion hat **eine Nullstelle**
- Die Nullstelle heisst in solchen Fälle:
  zwei zusammenfassende Nullstellen

$y = x^2 – 2x + 3$



- Die Kurve schneidet die x-Achse nicht
- Man sagt die Funktion habe: keine reelle Nullstelle

Quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten

Bei der Quadratischen Gleichung müssen die Lösungen immer mit einer Probe (durch Einsetzen) kontrolliert werden!

Begriffe

- Allgemeine Form: $0 = ax^2 + bx + c$
- Quadratisches Glied: ax^2
- Lineares Glied: bx
- Absolutes Glied: c

Wenn das quadratische Glied den Wert 1 hat, so nennt man diese Form die **Normalform der quadratischen Gleichung**.

- $x^2 + px + q = 0$

Graphische Lösung der quadratischen Gleichung

- Man kann die quadratische Gleichung gleich lösen wie eine lineare Gleichung. Wenn beispielsweise die Gleichung $2x^2 – 4x – 6 = 0$ graphisch gelöst werden soll betrachtet man an Stelle dieser Bestimmungsgleichung die entsprechende **Funktionsgleichung** $y = 2x^2 – 4x – 6$ und **zeichnet ihre Kurve (mit einer Wertetabelle)**, aus der man die **Nullstelle abliest**.

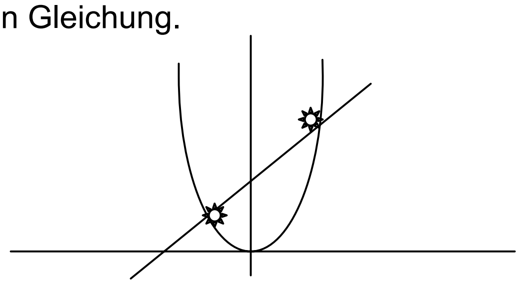
ODER

- Man bringt die allgemeine Form der quadratischen Gleichung auf die Normalform und formt sie danach um auf: $x^2 = px + q$
  Bsp: $2x^2 – 4x – 6 = 0$
  $x^2 – 2x –3 = 0$
  $\underline{\underline{x^2 = 2x + 3}}$

  Daraus kann man sagen:

  $y = x^2$
  $y = 2x + 3$

  Der Graph von $y = x^2$ ist eine Normalparabel, die man schnell einzeichnen kann.
  Der Graph $y = px + q$ ist eine Gerade.
  Die x-Werte der Schnittpunkte der beiden Graphen sind dann Lösungen der quadratischen Gleichung.



Bei der quadratische Gleichung muss man immer eine Kontrolle durch Einsetzen durchführen.
Auch hier können die drei Möglichkeiten (zwei unterschiedliche Nullstellen / zwei zusammenfassende Nullstellen / keine reelle Lösung) vorkommen.

Numerische Lösung der quadratischen Gleichung

Sonderfall 1: Die reinquadratische Gleichung $ax^2 + b = 0$

- Eine reinquadratische Gleichung ist eine quadratische Gleichung, bei der das **lineare Glied fehlt**. (Bsp: $2x^2 – 32 = 0$)

- Bei diesen Gleichungen bringt man das absolute Glied auf die andere Seite des Gleichheitszeichens und zieht die Wurzel:

  $2x^2 = 32$
  $x^2 = 16$
  $x = \pm\sqrt{16}$ $\qquad \underline{\underline{x_1 = 4}}$ $\qquad \underline{\underline{x_2 = -4}}$

- Die reinquadratische Gleichung hat **immer zwei reelle oder zwei imaginäre Lösungen**.

Sonderfall 2: Quadratische Gleichung, deren absolutes Glied null ist $ax^2+bx= 0$

- Dieser Typ Gleichung lässt sich einfach lösen, indem man die Gleichung zunächst faktorisiert:

  $5x^2 – 7x = 0$
  $x(5x – 7) = 0$

- Das nun links stehende Produkt kann nur dann den Wert haben, wenn entweder **der erste oder der zweite Faktor gleich Null ist**. Durch das „faktorweise Null setzen“ können die Lösungen ermittelt erden. Die erste Möglichkeit, dass also *x* gleich null ist, liefert die erste Lösung:

  $\underline{\underline{x_1 = 0}}$

  aus der zweiten Möglichkeit, dass $5x-7=0$ ist, folgt:

  $5x = 7$
  $\underline{\underline{x_2 = 1,4}}$

- Quadratische Gleichungen der Form $ax^2 + bx = 0$ haben stets **zwei reelle Lösungen, von denen eine Null ist.**

<u>Das Lösen der Normalform x2 + px q = 0</u>

- Bei der Gleichung:

  $x^2 + 6x + 9 = 0$

  stellt man sofort fest, dass die linke Seite ein vollständiges Quadrat ist, und zwar in der Form $(a + b)^2 = 0$. Deshalb können wir die Gleichung umformen in:

  $(x + 3)^2 = 0$

  Nun wird bereits die Quadratwurzel gezogen und man erhält:

  $x + 3 = \pm \sqrt{0}$

  $\underline{\underline{x_{1+2} = -3}}$

- Speziell an dieser Form ist, dass es **nur eine Lösung** gibt.

Meistens ergibt sich jedoch auf der linken Seite nicht ein vollständiges Quadrat. Um eine Bestimmungsgleichung der Normalform $\boldsymbol{x^2 + px + q = 0}$ zu lösen rechnet man mit folgender Formel:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\ x_2 &= -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \end{aligned}}$$

Lösungsformel **nur** für die Normalform $x^2 + px + q = 0$

<u>Lösung der allgemeinen Form der quadratischen Gleichung</u>

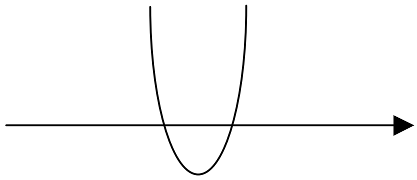
Eine Gleichung der **allgemeinen Form** $\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$ kann man mit folgender Formel lösen:

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

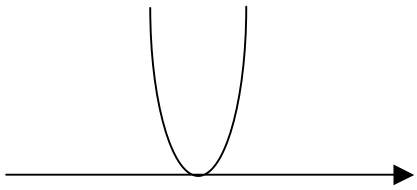
Diskusion der Lösungsformel

Der Ausdruck $(p/2)^2$-q ist eine Diskriminante

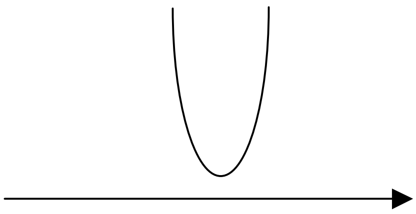
- Wenn die Diskriminante positiv ist: D>0



- Wenn die Diskriminante geich Null ist: D=0



- Wenn die Diskriminante negativ ist: D<0



Der Wurzelsatz von Vieta

Bildet man die Summe der Lösung x_1 und x_2 einer quadratischen Gleichung der Normalform, so erhält man:

$$x_1 + x_2 = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \right) + \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \right) = -2\frac{p}{2} = -p$$

Bildet man das Produkt:

$$x_1 * x_2 = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \right) * \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \right) = \left(-\frac{p}{2} \right)^2 - \left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \right)^2 = q$$

Es kann demnach festgehalten werden: (Wurzelsatz von Vieta)

$$\boxed{\begin{array}{c} x_1 + x_2 = -p \\ \\ x_1 * x_2 = q \end{array}}$$

Dieser Satz kann angewandt werden für:

- Die Probe der richtigen Lösung quadratischer Gleichungen
- Das schnelle Lösen von quadratischen Gleichungen mit einfachen Koeffizienten
- Die Theorie algebraischer Gleichungen

Produktform der quadratischen Gleichung

Eine quadratische Gleichung der Normalform kann in der Produktform wie folgt geschrieben werden:

$$\boxed{(x - x_1)(x - x_2) = 0}$$

Eine quadratische Gleichung der allgemeinen Form kann in der Produktform wie folgt geschrieben werden:

$$\boxed{a(x - x_1)(x - x_2) = 0}$$

Gleichungen vierten Grades, die sich auf quadratische Gleichungen zurückführen lassen

Substitutionsverfahren

Beispiel:

Die Bestimmungsgleichung

$x^4 - 8x^2 + 15 = 0$

hat die Besonderheit, dass **die dritte und die erste Potenz der Unbekannten fehlen**.

In solchen Fällen ist es immer möglich, die Gleichung vierten Grades auf eine quadratische Gleichung zurückzuführen. **Man führt für x^2 eine Unbekannte ein und substituiert** (substituieren = ersetzen):

$x^2 = y$ (oder andere Symbole)

Somit heisst die Gleichung

$y^2 - 8y + 15 = 0$
$y_{1,2} = 4 \pm\sqrt{16-15}$
$\underline{\underline{y_1 = 5 \quad ; \quad y_2 = 3}}$

Da nun $x = \pm\sqrt{y}$ ist, erhalten wir die vier Lösungen:

$x_{11} = \sqrt{5}$ $x_{12} = -\sqrt{5}$

$x_{21} = \sqrt{3}$ $x_{22} = -\sqrt{3}$

Eine derartige Gleichung vierten Grades nennt man **biquadratische Gleichung**.

Bezüglich den Lösungen gibt es drei Möglichkeiten:

- Es gibt **4 reelle Lösungen**. Die entsprechende Funktionsgleichung schneidet die x-Achse vier Mal.
- Es gibt **2 reelle und 2 nicht reelle** (imaginäre oder komplexe) **Lösungen**. (zwei Nullstellen)
- Es gibt **4 nicht reelle** (imaginäre oder komplexe) Lösungen. (keine reellen Nullstellen)

Wurzelfunktion und Wurzelgleichung

Begriffe

Monotone Funktion

Wenn eine Funktion *y = f(x)* in einem Bereich der unabhängigen Veränderlichen *x* **ständig steigt** bzw. **ständig fällt**, so heisst sie in diesem Bereich **monoton steigend** bzw. **monoton fallend** (monoton=eintönig).

- Eine Funktion ist **monoton steigend**, wenn der Funktionsgraph eine **positive Steigung** ist. (Bsp: *y=2x+1*)
- Eine Funktion ist **monoton fallend**, wenn der Funktionsgraph eine **negative Steigung** ist. (Bsp: *y=-x+1*)

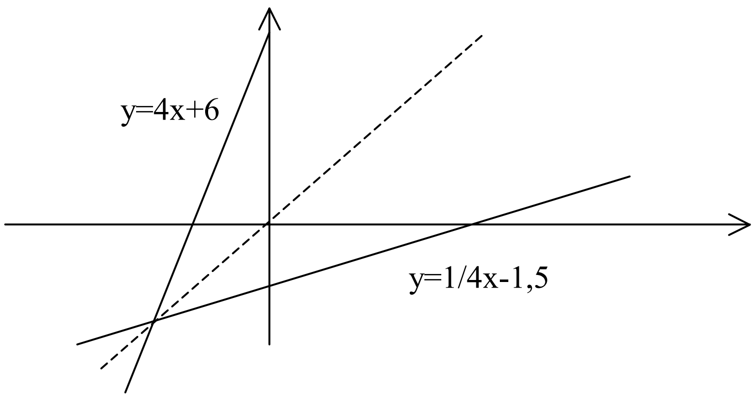
Stamm- und Umkehrfunktion

Eine **gegebene Funktionsgleichung** wird gewöhnlich auch **Stammfunktion** genannt.
Wenn man bei einer Stammfunktion die **Variablen *x* und *y* vertau**scht und die Gleichung wieder **nach *y* auflöst**, bekommt man die **Umkehrfunktion** (auch inverse Funktion genannt).

Stammfunktion	->	Vertauschen von *x* und *y*	->	**Umkehrfunktion**
y = f(x)		*x = f(y)*		*y =g(x)*

Beispiel :

Stammfunktion				Umkehrfunktion
y = 4x + 6	->	*x = 4y + 6*	->	*y = ¼ x – 1,5*



Zeichnerisch erhält man den Umkehrgraphen, indem man die **Stammfunktion spiegelt an der Gerade *y=x***.

Die Wurzelfunktion

- Allgemein ist eine Wurzelfunktion: $y = x^{\frac{1}{n}}$ oder $y = \sqrt[n]{x}$
- Die Graphen einer Wurzelfunktion sind jeweils Teile (sogenannte Äste) einer quadratischen Parabel, allerdings in einer anderen Lage.

Wurzelgleichungen mit einer Unbekannten

- Eine Wurzelgleichung ist eine Bestimmungsgleichung, bei der die Unbekannte mindestens einmal unter einer Wurzel vorkommt.

- Um eine Wurzel-Gleichung zu lösen, muss man zuerst die Wurzel auf eine Seite isolieren:

Bestimmungsgleichung: $\sqrt{x+5} - 3 = 0$

-> $\sqrt{x+5} = 3$

nun quadrieren $x + 5 = 9$

$\underline{\underline{x = 4}}$

Probe:

$\sqrt{4+5} - 3 = ?\ 0$

$3 - 3 = 0$ $\quad\surd$

- Wird beim Auflösen einer Wurzelgleichung **quadriert, so ist die Probe ein notwendiger Teil der Lösung !**

Allgemein ist die Probe **immer notwendig**, wenn mit einer **geraden Zahl potenziert** wird. Sie ist jedoch **nicht notwendig**, **beim Potenzieren mit einer ungeraden Zahl**.

- Einige Wurzelgleichungen könne auf Gleichungen ersten, zweiten oder höheren Grades zurückgeführt werden. Ist dies nicht möglich, müssen **graphische oder numerische Näherungsverfahren** hinzugezogen werden.

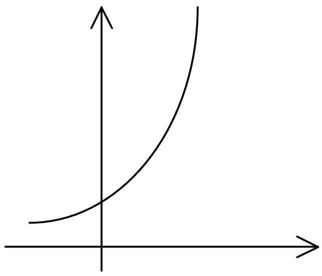
Exponentialfunktion und Logarithmusfunktion (-Gleichung)

Exponentialfunktionen

- Allgemeine Form: $y = a^x$
- Exponentialfunktionen sind Funktionen, bei denen die unabhängige Variable in der Funktionsgleichung als Exponent einer positiven Basis steht.

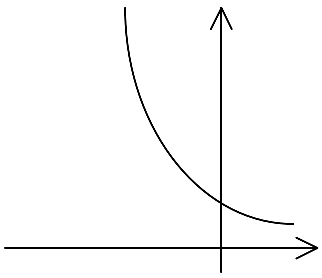
Exponentialfunktion mit Basis grösser als 1 (Bsp: $y=10^x$; $y=3^x$...)

- Die Graphen verlaufen oberhalb der x-Achse
- Die Graphen verlaufen im I. und II. Quadranten
- Sie gehen alle durch den Punkt (0/1)
- Sie sind im ganzen Definitionsbereich monoton steigend
- Mit kleiner werdendem x-Wert nähern sich die Graphen immer mehr der Asymptote



Exponentialfunktion mit Basis kleiner als 1 (Bsp: $y=0,5^x$)

- Die Graphen verlaufen ebenfalls oberhalb der x-Achse
- Die Graphen verlaufen ebenfalls im I. und II. Quadranten
- Sie gehen ebenfalls durch den Punkt (0/1)
- Sie sind im ganzen Definitionsbereich monoton fallend
- Mit grösser werdendem x-Wert nähern sich die Graphen der Asymptote



Logarithmusfunktion

Da sich die vorher beschriebenen **Exponentialfunktionen** über den gesamten Bereich monoton verhalten, besitzen sie eine **Umkehrfunktion**.

- Allgemeine Form: $\boldsymbol{y = \log_a x}$
- Logarithmusfunktionen sind die **Umkehrform der Exponentialfunktion**
- Graphische Darstellung über die **Wertetabelle** oder durch **spiegeln der entsprechenden Exponentialfunktion über die Gerade *y=x***
- Wenn ***a* kleiner als 1** ist, ist der Graph **monoton fallend**
- Wenn ***a* grösser als 1** ist, ist der Graph **monoton steigend**
- Logarithmusfunktionen nähern sich der **y-Achse asymptotisch**
- Die Graphen der Logarithmusfunktionen gehen durch den Punkt (1/0)

Exponentialgleichung

Exponentialgleichung = Bestimmungsgleichung, bei der **die Unbekannte mindestens einmal in einem Exponenten** (Potenz- oder Wurzelexponent) **vorkommt.**

Zur Lösung von Exponentialgleichungen gibt es **zwei Verfahren**:

Exponentenvergleich:
In den einfachsten Fällen lassen sich die beiden Seiten der Exponentialgleichung als eine Potenz mit gleicher Basis darstellen.

Aus $a^x = a^p$ folgt dann: $\underline{\underline{x=p}}$

Beispiel:

$$a^{2x+3} = a^{13-3x}$$
$$2x + 3 = 13 - 3x$$
$$5x = 10$$
$$\underline{\underline{x = 2}}$$

Logarithmieren:
Sind beide Seiten der Exponentialgleichung Potenzen mit verschiedener Basis, z.B. $a^x = b^p$, so können wir die Unbekannte durch beidseitiges Logarithmieren bestimmen:

$x * \lg a = p * \lg b$

$$\underline{\underline{x = p\frac{\lg b}{\lg a}}}$$

Theoretisch ist es gleichgültig, in bezug auf welche Basis logarithmiert wird. Aus Praktischen Gründen ist jedoch stets die Basis 10 zu empfehlen.

Viele Exponentialgleichungen können allerdings nicht nach diesen Methoden gelöst werden. Dann muss ein graphisches oder numerisches Näherungsverfahren angewendet werden.

Logarithmische Gleichungen

Logarithmische Gleichung = Bestimmungsgleichung, bei der der Logarithmus der Unbekannten vorkommt.

Die elementare Lösung einfacher Logarithmusgleichungen beruht auf der geschickten Anwendung der Rechengesetze für Logarithmen

Beispiel:

$$3 \cdot \lg(5x) = 2$$
$$\lg(5x) = 2/3$$
$$5x = 4{,}6416$$
$$\underline{\underline{x = 0{,}9283}}$$

Wie schon bei den Exponentialgleichungen gibt es logarithmische Gleichungen, die man mit diesem Verfahren nicht lösen kann. In solchen Fällen muss wiederum ein graphisches oder numerisches Näherungsverfahren angewendet werden.